Vektorový prostor

# Definice

Vektorovým prostorem nad tělesem T nazveme trojici (M, ⊕, ⊗), kde M je množina, jejíž prvky nazýváme vektory, ⊕ je zobrazení M × M → M a ⊗ je zobrazení T × M → M. Uvedená zobrazení musí navíc mít následující vlastnosti:

1. D(⊕) = M × M – ke každé dvojici vektorů existuje jejich součet, který je také vektorem
2. Pro každou dvojici (a, b) ∈ M × M je a ⊕ b = b ⊕ a
3. Pro každou trojici (a, b, c) ∈ M × M × M je (a ⊕ b) ⊕ c = a ⊕ (b ⊕ c)
4. Existuje vektor o ∈ M takový, že pro každé a ∈ M je a ⊕ o = a
5. Ke každému prvku a ∈ M existuje prvek (−a) ∈ M takový, že je a ⊕ (−a) = o
6. D(⊗) = T × M – ke každému číslu a vektoru existuje příslušný násobek vektoru, který je také vektorem
7. Pro každé a ∈ M je 1 ⊗ a = a
8. Pro každou trojici (α, β, a) ∈ T × T × M je α ⊗ (β ⊗ a) = (α · β) ⊗ a
9. Pro každou trojici (α, a, b) ∈ T × M × M je α ⊗ (a ⊕ b) = α ⊗ a ⊕ α ⊗ b
10. Pro každou trojici (α, β, a) ∈ T × T × M je α ⊗ a ⊕ β ⊗ a = (α + β) ⊗ a

Těleso tedy značí množinu čísel, kterými vektory násobíme.

Uvedených deset požadavků se nazývá axiomy vektorového prostoru. Na jejich základě se dá odvodit několik zajímavých důsledků:

* Nulový vektor je jediný

Kdyby existovaly dva nulové vektory o1, o2, pak by z jejich nulovosti vyplývalo

o1 = o1 ⊕ o2 = o2 a musely by tedy být stejné

Definice vektorového podprostoru:

Je-li V = (M, ⊕, ⊗) vektorový prostor nad tělesem T a množina L ⊂ M taková, že

* ⊕: L × L → L a D(⊕) = L × L
* ⊗: T × L → L a D(⊗) = T × L

nazveme U = (L, ⊕, ⊗) podprostorem vektorového prostoru V. Zapisujeme to ve tvaru U ⊂ V. Těleso je automaticky společné.